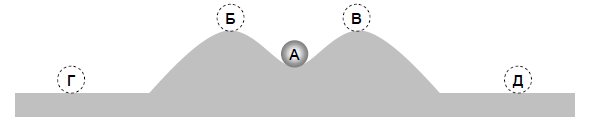
**1. Устойчивость и ее разновидности.**

*Что такое устойчивость?* «Бытовое» понятие устойчивости известно нам с детства. Например, табуретка с двумяножками неустойчива, она упадет при малейшем дуновении ветра, а с тремя – устойчива. Всемзнакомый пример неустойчивой системы – близко расположенные микрофон и колонки, которые начинают «свистеть». Неустойчивость может привести к трагическим последствиям. Достаточно вспомнить аварии самолетов, попавших в грозовой фронт или в штопор, взрыв ядерного реактора на Чернобыльской атомной станции в 1986 г.

Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках имеют в виду, что устойчивая система возвращается в состояние равновесия, если какая-то сила выведет ее из этого состояния. Шарик на рисунке находится в *устойчивом* равновесии в положении А – если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.

****

Однако мы можем заметить, что если шарик *сильно* отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть устойчивость нарушится.

В положениях Б и В шарик также находится в положении равновесия, но оно *неустойчиво*, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.

В положениях Г и Д равновесие шарика *нейтральное* – при небольшом смещении он остается в новом положении. При этом говорят, что система *нейтрально устойчива*, то есть находится на границе устойчивости.

Можно показать, что система «шарик-горка» – **нелинейная**. Как мы увидели, для нее

• устойчивость – не свойство системы, а свойство некоторого положения равновесия;

• может быть несколько положений равновесия, из них некоторые – устойчивые, а некоторые – нет;

• положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система устойчива «в малом») и неустойчиво при больших («в большом»).

***Устойчивость бывает разная***

* **Устойчивость «вход-выход»** - рассматривается только выход системы при различных ограниченных входах;
* **Устойчивость автономнойсистемы** - система на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые). Предполагается, что систему вывели из положения равновесия (задали ненулевые начальные условия) и «отпустили».

***Техническая устойчивость*** (или устойчивости по выходу) – рассматривается только выход системы, а не ее внутренние сигналы.

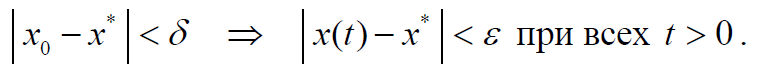
***Внутренняя (математическая) устойчивость* -** рассматривается не только выход, но и все ее внутренние переменные (переменные состояния), которые приближаются к своим значениям в положении равновесия.

*Внутренняя устойчивость*

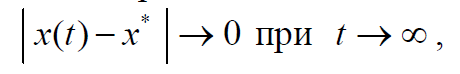
Формальное определение внутренней устойчивости было введено в работах А.М.Ляпунова, поэтому такое понятие устойчивости принято называть *устойчивостью по Ляпунову*.

Для простоты рассмотрим систему первого порядка, с одной переменной состояния *x*(*t*) .

Система называется устойчивой по Ляпунову в положении равновесия *x*\* , если при начальном отклонении от положения равновесия *x*\* не более, чем на δ, траектория движения отклоняется от *x*\* не более, чем на ε, причем для каждого ε можно найти соответствующее ему δ(ε) :

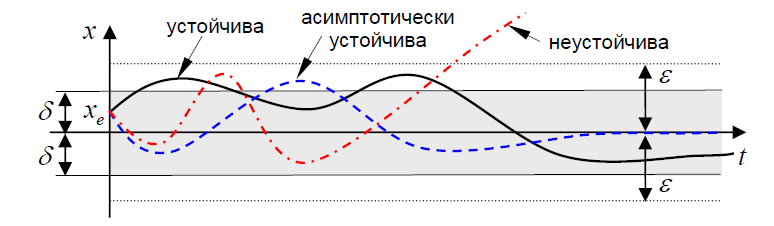
****

Если кроме того вектор состояния стремится к положению равновесия, то есть,

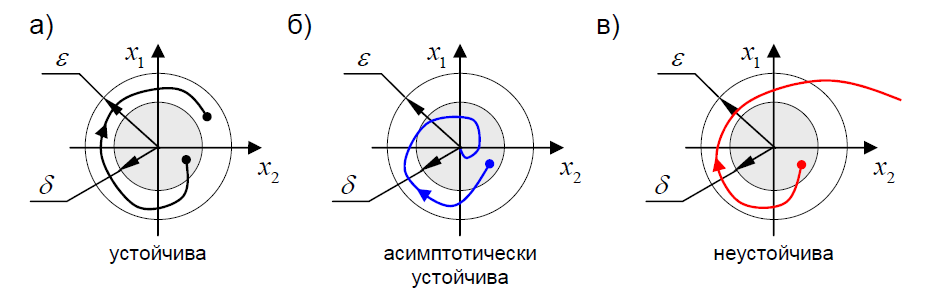
****

система называется *асимптотически устойчивой* в положении равновесия *x*\*.

На следующем рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем первого порядка (с одной координатой *x*(*t*) ).

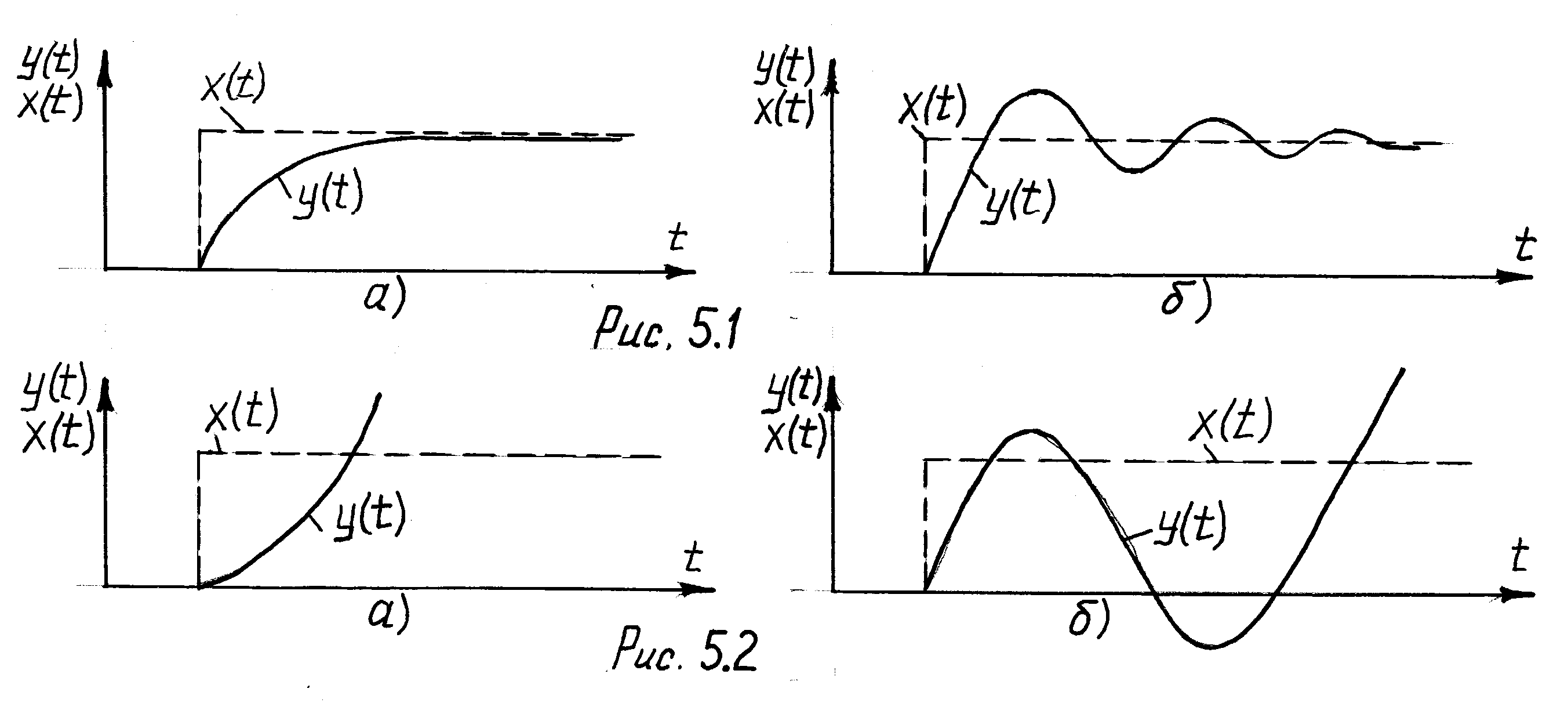
****

Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на фазовой плоскости, где по одной оси откладывается *x*1 (*t* ), а по другой – *x*2 (*t* ).

****

**2. Условия устойчивости линейных автоматических систем.**

Условие устойчивости линейных систем автоматического управления является основным условием их работоспособности. Для систем автоматического управления радиоэлектронного оборудования требование устойчивости систем выражается в затухании переходного процесса, возникающего в системе при изменении действующего на нее внешнего воздействия. В зависимости от величины параметров системы переходный процесс в системе может носить апериодический или колебательный характер. На рисунках приведены графики переходного процесса для устойчивой системы (пара верхних), а пара нижних - для неустойчивой.



Для определения условия устойчивости рассмотрим уравнение динамики системы, изображенной на рис. 5.1. Это уравнение имеет вид

 (5.1)

где 



Рис. 5.1.

Уравнение (5.1) может быть записано в виде линейного неоднородного дифференциального уравнения

 (5.2)

Известно, что решение в общем виде уравнения (5.2) состоит из двух составляющих

 (5.3)

где yycm(t) - частное решение неоднородного уравнения (5.2) с правой частью, зависящее от воздействия x(t);

*yn(t)* - общее решение однородного уравнения

 (5.4)

описывающее переходный процесс в системе.

Система будет устойчива, если составляющая решения *yn(t)* будет затухающий, т.е. при *t→∞* *yn(t)→0*.

Общее решение уравнения (3.4) *n*-го порядка имеет вид

, (5.5)

где Сi - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями и возмущениями;

*λi* - корни характеристического уравнения

 (5.6)

Многочлен А(λ) является знаменателем передаточной функции



с замененной переменной *λ* вместо *D*.

Таким образом, характеристическое уравнение (5.6) по виду полностью совладает с левой частью дифференциального уравнения, приравненной к нулю*,* отличаясь только заменой символа дифференцирования *D* на комплексную переменную *λ*.

Анализ общего решения уравнения (5.5) показывает, что оно зависит от корней характеристического уравнения *λi ,* определяемых только левой частью уравнения (5.2), и от постоянных интегрирования *Сi* , определяемых начальными условиями и видом правой части, т.е. переходный процесс определяется как левой, так и правой частями дифференциального уравнения (5.2).

Процесс *yn(t)* будет затухающим только в том случае, если каждая составляющая решения (5.5) с течением времени будет стремиться к нулю. Затухание процесса полностью определяется корнями характеристического уравнения. Таким образом, устойчивость системы полностью определяется только левой частью дифференциального уравнения.

Корни характеристического уравнения могут быть вещественными и комплексными. В том случае, если корень *λi* вещественный, т.е. *λi=αi* , составляющая  будет возрастать с течением времени при *αi > 0* и будет убывать при *αi< 0.*

В случае комплексных корней пара сопряженных корней



образует колебательную составляющую



где *Ai* и *ϕ* определяются *Сi , Сi+1.*

Для затухания колебательной составляющей необходимо, чтобы вещественная часть корней была отрицательной.

При представлении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости *λ* (рис. 5.2.) общее условие затухания переходного процесса можно сформулировать следующие образом: для затухания переходного процесса необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости комплексного переменного *λ*.



Рис. 5.2

Если хотя бы один корень будет лежать в правой полуплоскости, то процесс будет расходящимся. Мнимая ось является границей устойчивого и неустойчивого состояний системы.

Таким образом, для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения лежали слева от мнимой оси комплексной плоскости параметра *λ*. Условно границу комплексной плоскости называют апериодической (рис. 5.2), если имеется нулевой корень, и колебательной (рис. 5.2), если имеется пара чисто мнимых корней при условии, что все остальные корни лежат левее их. Следует отметить, что вычисление корней характеристического уравнения, особенно высокой степени, связано с большими трудозатратами. Поэтому на практике при определении устойчивости системы пользуются критериями устойчивости, которые позволяют исследовать устойчивость системы без вычисления корней характеристического уравнения.

Характеристики элементов и систем автоматического управления зависят от многих факторов, которые нарушают их линейный характер. Практически все реальные системы автоматического управления радиоэлектронного оборудования являются нелинейными. Но многие системы можно считать близкими к линейным и использовать при проектировании систем с необходимой для практики точностью линейную теорию САУ. Для этого необходимо произвести линеаризацию реальных уравнений системы, Широкое распространение получили методы линеаризации путем разложения в степенные ряды и отбрасывания членов высшего порядка малости. Оценку устойчивости проводят по первому приближению разложения, т.е. по линейным членам разложения. Правомерность таких действий подтверждается доказанными Ляпуновым следующими теоремами:

1. Реальная система устойчива независимо от вида малых нелинейностей, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части.

2. Реальная система неустойчива независимо от вида малых нелинейностей, если хотя бы один корень характеристического уравнения линеаризованной системы имеет положительную вещественную часть.

3. При наличии нулевой вещественной части среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы при всех остальных отрицательных, ничего нельзя сказать об устойчивости реальной системы без исследования полного уравнения с учетом малых нелинейностей.

Последняя теорема для практического использования не представляет интереса, так как нормально функционирующие системы не должны находиться на границе устойчивости и даже вблизи нее.

Определение устойчивости по значениям корней характеристического уравнения сопряжено для систем высокого порядка *(n≥3)* с большими трудностями. Для устранения таких трудностей в ТАУ были разработаны специальные правила (критерии) (алгебраические и частотные), позволяющие оценивать устойчивость АС без определения значений корней характеристического уравнения, т. е. его решения. Ценность таких критериев заключается еще и в том, что они дают возможность выяснить причину неустойчивости, т. е. какой элемент, какой параметр системы нужно изменить и в какую сторону, чтобы сделать систему устойчивой.

**3. Критерий Гурвица.**

Под алгебраическими критериями устойчивости понимают правила, позволяющие исследовать устойчивость системы по коэффициентам характеристического уравнения без непосредственного нахождения его корней. Среди алгебраических критериев наибольшее распространение в теории автоматического управления получили критерии Рауса, Гурвица.

Задача отыскания критериев устойчивости для систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, впервые была сформулирована в 1868 году Максвеллом. В алгебраической форме эта задача была решена Раусом в 1877 году, затем независимо от него в 1895 г. Гурвицем. Условия устойчивости, получившие название критерия Рауса-Гурвица (чаще критерий Гурвица), были введены в виде неравенств, составленных по особым правилам по коэффициентам характеристического полинома.

Существует несколько алгоритмов, позволяющих проверить устойчивость полинома

**

Прежде всего, для устойчивости все коэффициенты *a* (*i* 0,...,*n*) должны быть одного знака, обычно считают, что они положительные. Это *необходимое условие устойчивости полинома.* Однако при *n* > 2 это условие недостаточно, если полином имеет комплексно-сопряженные корни. Поэтому были разработаны ***необходимые и достаточные***условия (критерии) устойчивости полиномов.

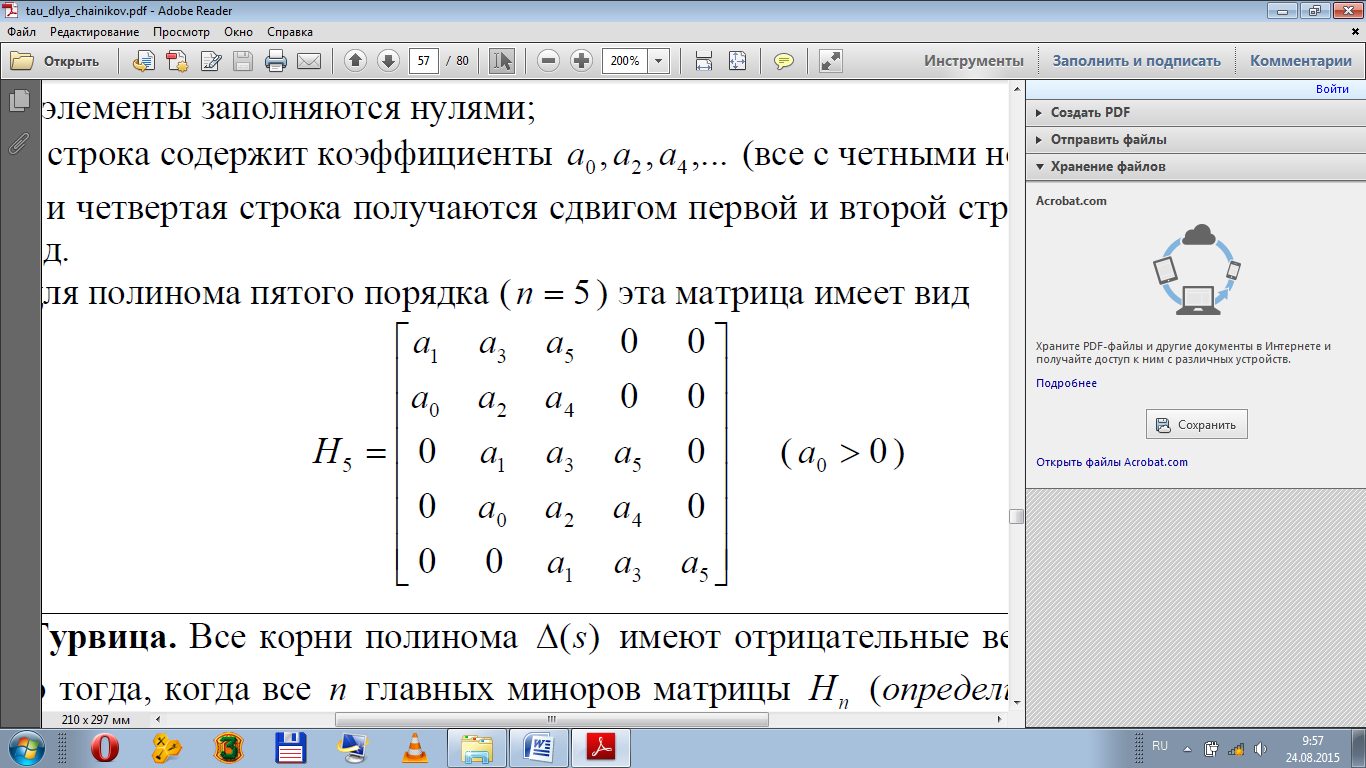
Один из самых известных критериев – **критерий Гурвица** – использует матрицу *Hn* размером *n*× *n* , составленную из коэффициентов полинома Δ(*s*) следующим образом:

• первая строка содержит коэффициенты *а*1, *а*3, *а*5,(все с нечетными номерами), оставшиеся элементы заполняются нулями;

• вторая строка содержит коэффициенты *а*0, *а*2, *а*4,(все с четными номерами);

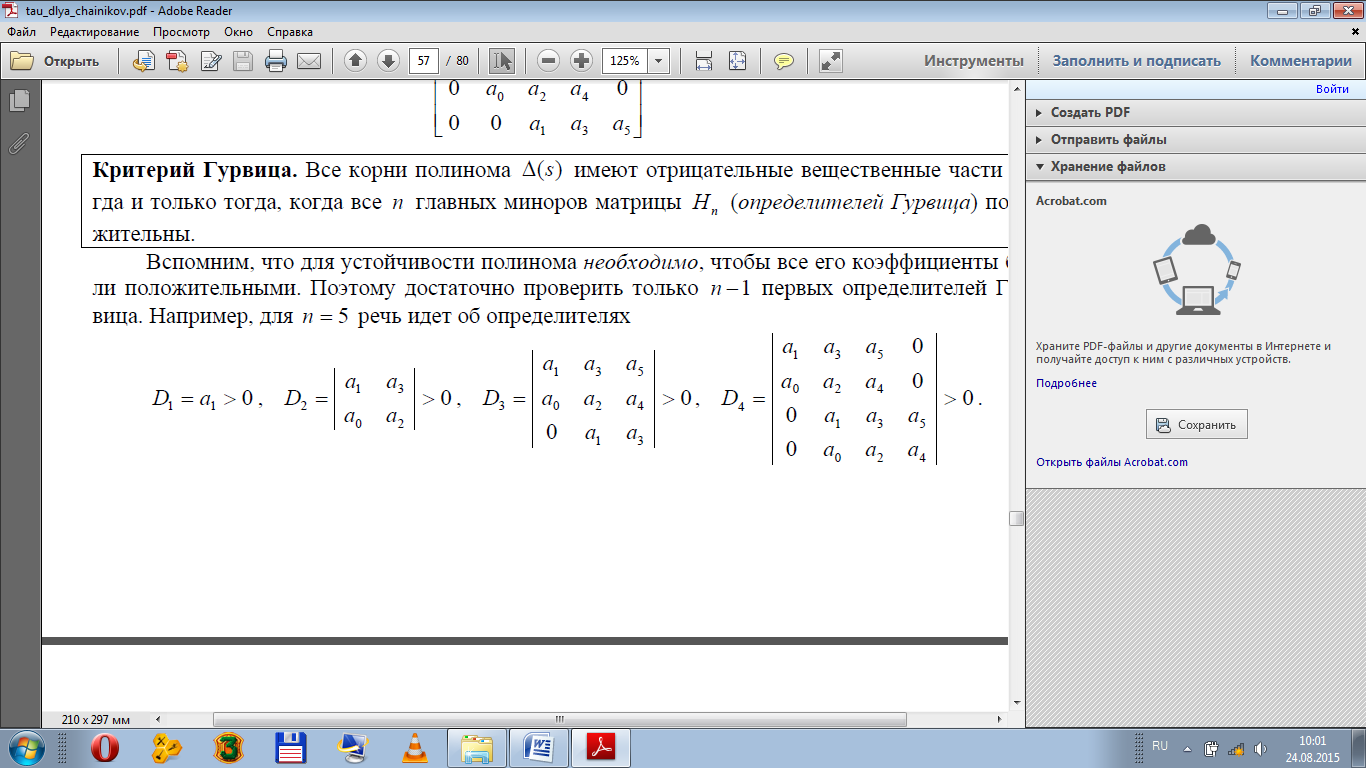
• третья и четвертая строка получаются сдвигом первой и второй строк на 1 позицию вправо, и т.д.

Например, для полинома пятого порядка ( *n* = 5 ) эта матрица имеет вид



**Критерий Гурвица.** Все корни полинома А(р) имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все ***n***главных миноров матрицы *Hn* (*определителей Гурвица*) положительны.

Вспомним, что для устойчивости полинома *необходимо*, чтобы все его коэффициенты были положительными. Поэтому достаточно проверить только *n* −1 первых определителей Гурвица. Например, для *n* = 5 речь идет об определителях

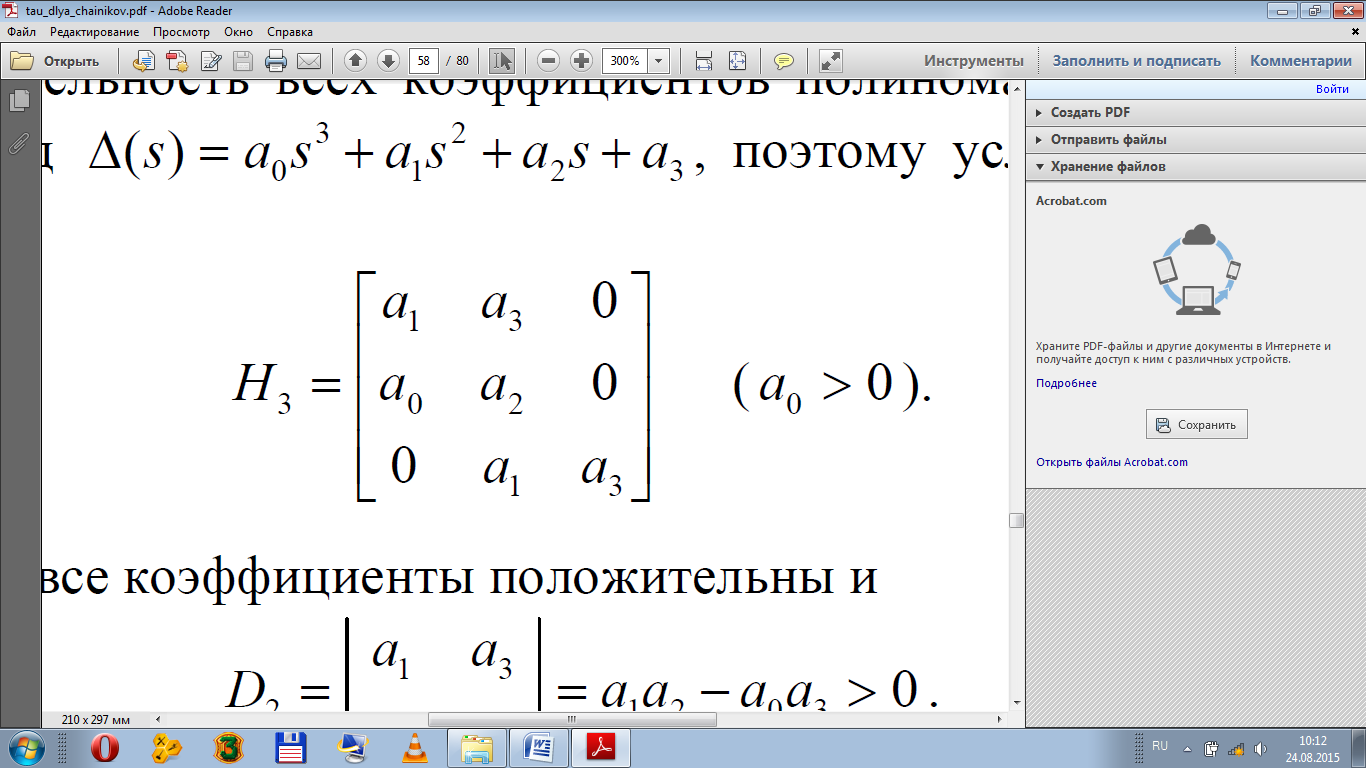


Таким образом, условия устойчивости сводятся к нескольким неравенствам. Это очень удобно для систем низкого порядка.

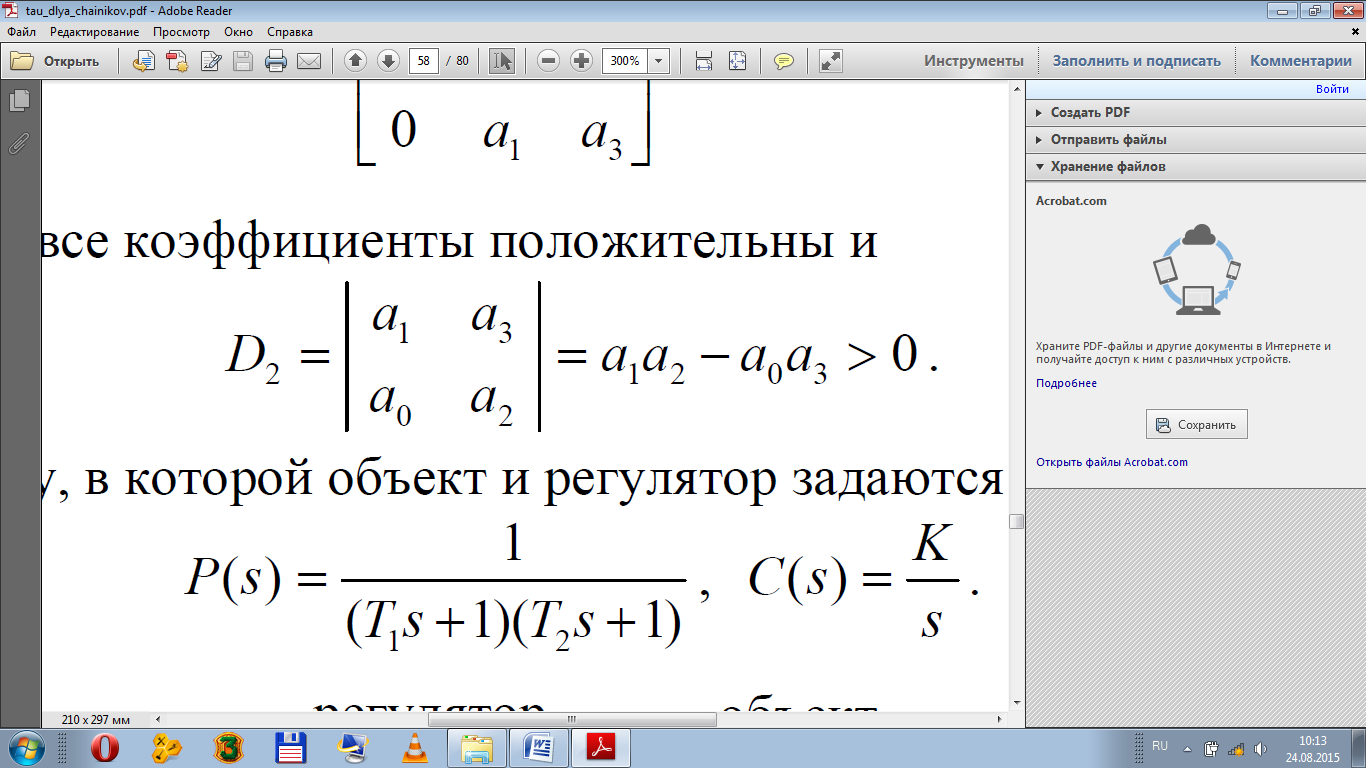
Например, для *n* = 2 необходимое и достаточное условие устойчивости – положительность всех коэффициентов полинома. Для *n* = 3 характеристический полином имеет вид

**

поэтому условия Гурвица определяются матрицей



Полином устойчив, если все коэффициенты положительны и



Нужно отметить, что при выполнении необходимого условия устойчивости (положительности всех коэффициентов характеристического полинома АС) достаточно проверить положительность только нечетных определителей, т. е. *D1, D3 ,D5* и т. д. **(это условие Льенара-Шипара, 1914 г.)**

Более того, для систем не выше 4-го порядка достаточно при выполнении необходимого условия устойчивости проверить положительность только одного определителя *Δn-1.* Это условие для системы 3-го порядка получило название критерия **Вышнеградского**.



Для такой АС



т. е. для устойчивой АС произведение “средних” коэффициентов должно быть больше произведения “крайних”.

Так как для *n > 4* условия Гурвица получаются достаточно громоздкими, то практически критерий Гурвица применяется лишь для систем не выше 4-го порядка (как замкнутых, так и разомкнутых).

Условие нахождения АС на границе устойчивости можно получить, приравнивая к нулю главный определитель *Dn* , т. е.

**

**Возможно 2 случая:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1)*а0 = 0* | означает, что один из корней характеристического полинома уравнения равен нулю (АС находится на границе так называемой апериодической устойчивости) |
| 2)Dn-1=0 | означает, что имеются два сопряженных чисто мнимых корня (АС находится на границе колебательной устойчивости) |

Условие

Dn-1 = 0

позволяет определить критическое значение параметров АС.

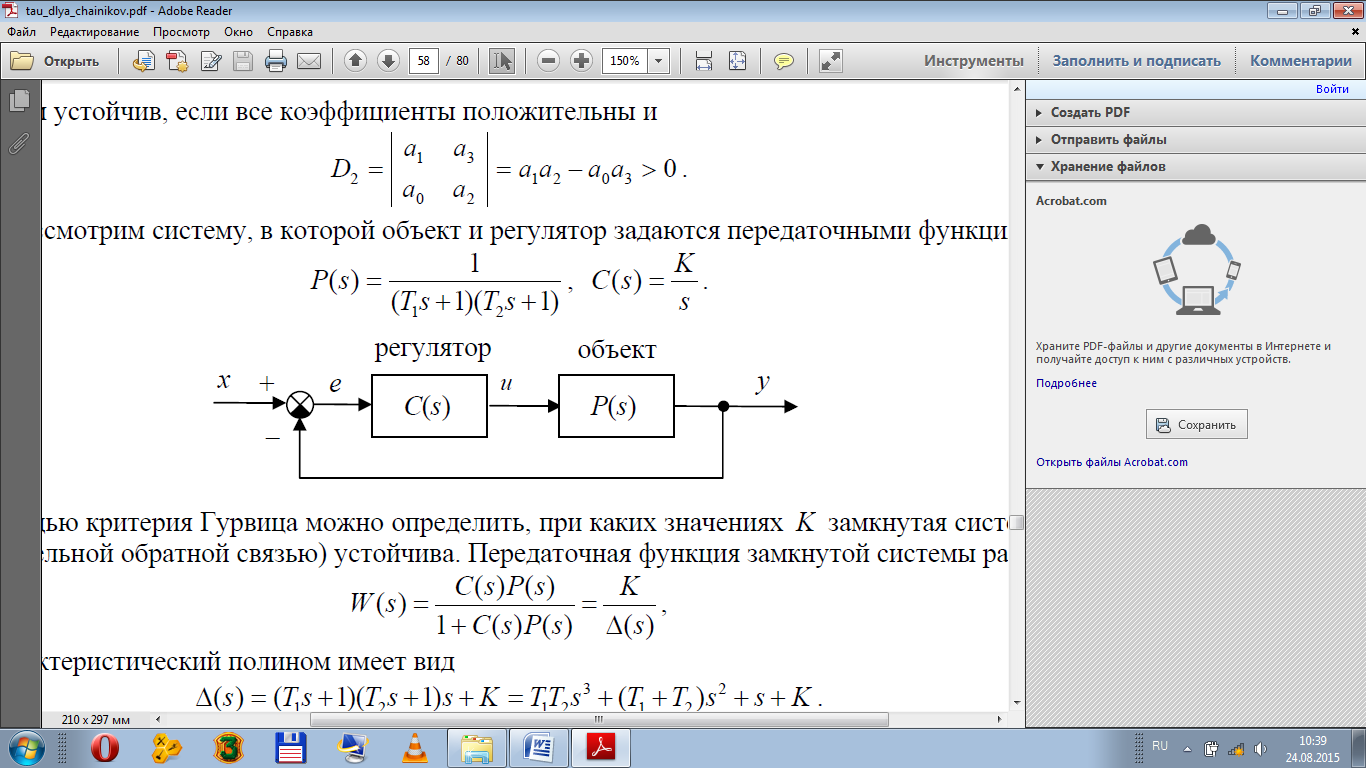
Т. е. если Dn-1 = Dn-1(λ) , где λ - параметр системы, то значение λ, при котором

Dn-1 (λкр) = 0

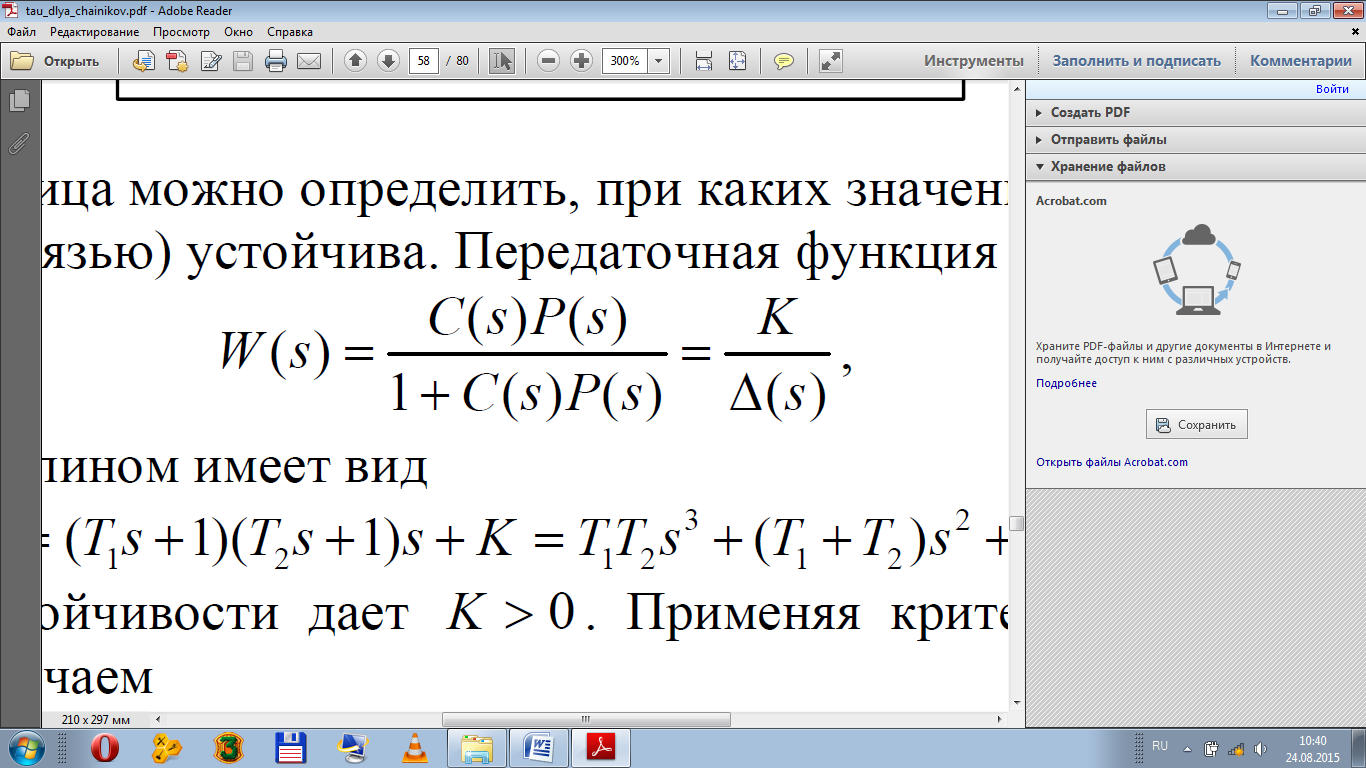
называется **критическим.**

**ПРИМЕР**

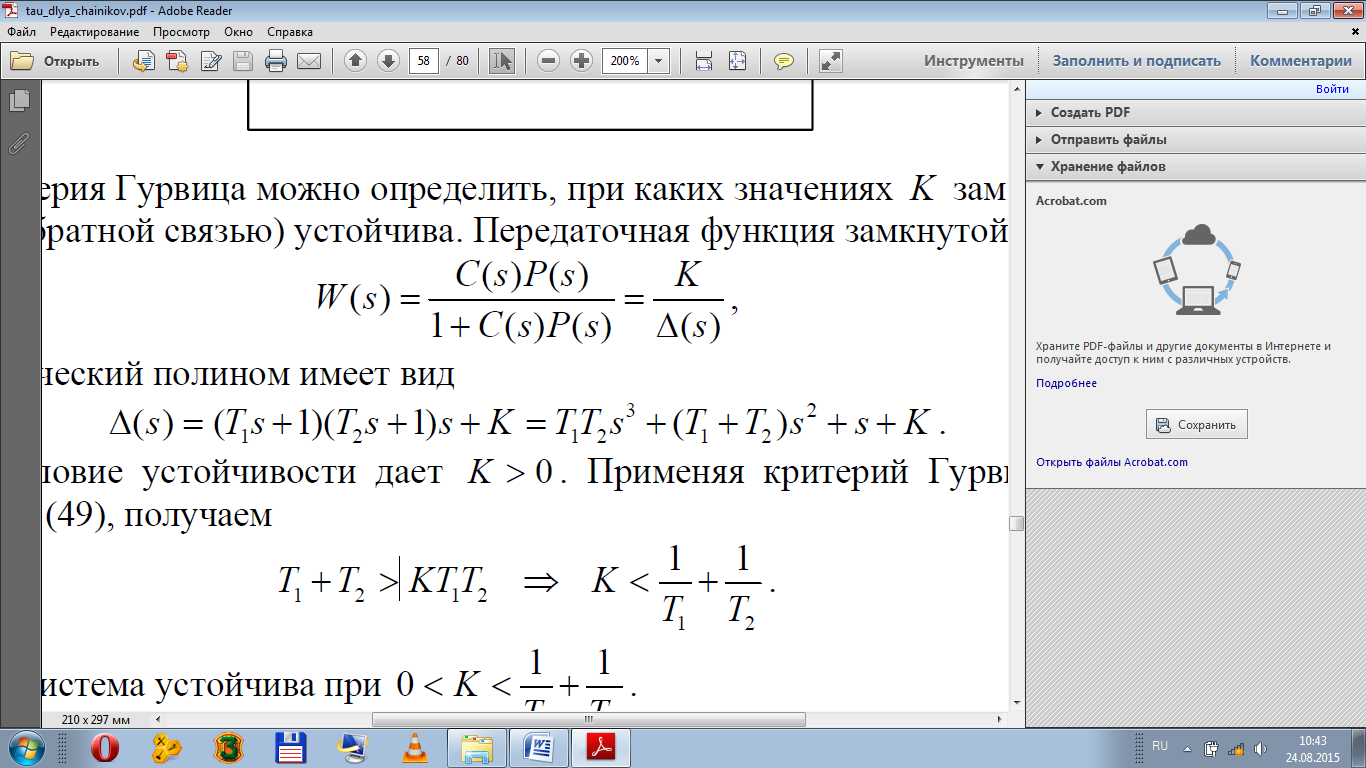
Рассмотрим систему, в которой объект и регулятор задаются передаточными функциями:



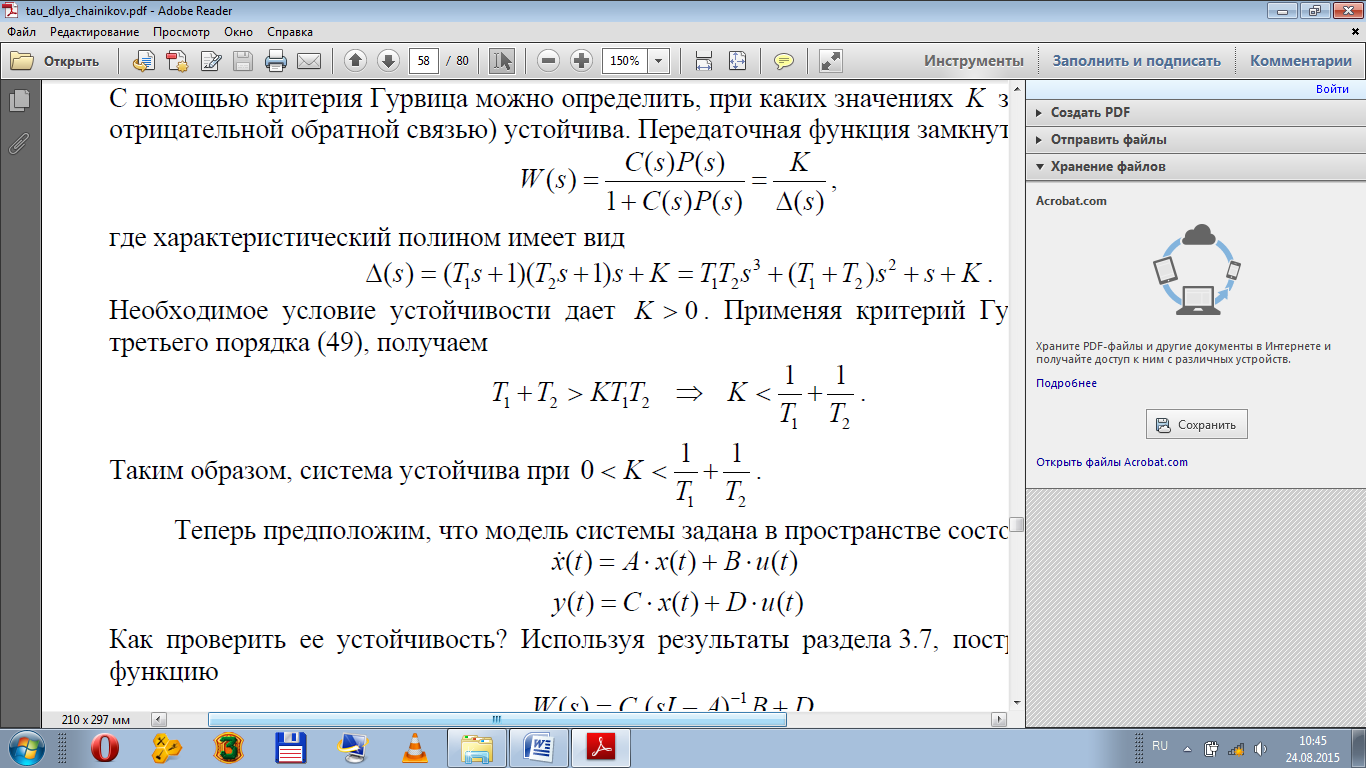
С помощью критерия Гурвица можно определить, при каких значениях *K* замкнутая система (с отрицательной обратной связью) устойчива. Передаточная функция замкнутой системы равна



где характеристический полином имеет вид



Необходимое условие устойчивости дает *K* > 0 . Применяя критерий Гурвица для системы третьего порядка, получаем



Недостаток критерия Гурвица: для АС высоких порядков возможно лишь определение устойчивости, либо неустойчивости системы, но нельзя получить рекомендации, как следует изменять параметры системы для приведения её в устойчивое состояние.

В дальнейшем мы рассмотрим и другие критерии устойчивости, например критерий устойчивости Михайлова и Найквиста, относящийся к группе частотно-зависимых критериев. Они являются графоаналитическими критериями т.е. на основе построенного годографа для АС определяется является ли система устойчивой.